**Fachbereich Physikalische Technik**
**Prof. Dr. Klaus Morawetz**

Zusatzaufgaben mit * gekennzeichnet

## Übungen Mathematik III-5

### Fourier- und LaPlace - Transformation (23+12 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \;\; mit \quad \alpha > 0 \;\; für \;\; t \geq 0 \\ 0 \;\; für \;\; t < 0 \end{cases}$$

   (a) Falten Sie $f(t)$ mit sich selbst (**1 Punkt**).

   (b) Berechnen Sie $\mathcal{F}\{f(t) \otimes f(t)\}$ direkt durch Ausführung der Fou-riertransformation. Veranschaulichen Sie die Integrationsgrenzen durch eine entsprechende Skizze! (**1 Punkt**)

   (c) Verifizieren Sie das Ergebnis durch Anwendung des Faltungssatzes.(**1 Punkt**)

2. Berechnen Sie das Fourierspektrum der Faltung(**2 Punkt**)

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} rect\left(\frac{x-ng}{a}\right) = rect\left(\frac{x}{a}\right) \otimes \sum_{n=-N}^{N} \delta(x-ng)$$

   <u>Bemerkung:</u>

   $f(x)$ stellt die Transmissionsfunktion eines Gitters mit $N_0 = 2N+1$ Spalten der Breite $a$ im Abstand $g$ (Gitterkonstante) dar. Da die Fraunhofersche Beugung mathematisch einer Fouriertransformation entspricht, stellt $\mathcal{F}\{f(x)\}$ die Superposition der Amplituden der interferierenden Lichtwellen, $(\mathcal{F}\{f(x)\})^2$ die Intensitätsverteilung im Fraunhoferschen Beugungsbild dar.

3. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte jeweils für folgende Funktionen ($f(t) = 0$ für $t < 0$): (**je 2 Punkte**)

$$\begin{aligned} f(t) &= t^n, \quad n \in \mathbb{N} \\ f(t) &= t^n e^{-\alpha t} \text{ mit } \; n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \\ (*) f(t) &= 4t^2 - 5t^3 + \frac{1-2t}{\sqrt{t}}; \\ f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } \; t \leq 0 \\ t & \text{für } \; -0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{für } \; t \geq 1 \end{cases} \\ f(t) &= \sin \omega_0 t \\ (*) f(t) &= \sinh(2t) \end{aligned}$$

   Geben Sie bei jeder Transformation den Konvergenzbereich an!

4. Ermitteln Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Originalfunktionen zu folgenden Bildfunktionen: (**je 2 Punkte**)

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{10s^3+20s^2+s+5}{(s+1)^2(s^2+s-2)}; \quad F(s)=\frac{s^2-3}{s^3-9s}; \quad F(s)=\frac{3s-4}{s^2-s-6} \\ (*)F(s) &= \frac{s+4}{s^2+5s+6}; \quad (*)F(s)=\frac{s+5}{(s+1)(s^2+1)}; \end{aligned}$$

5. Lösen Sie mit Hilfe der Laplace - Transformation indem Sie die Partialbruchzerlegung mit Mathematica realisieren (**je 2 Punkte**)

   (a) die DGL
   $$\ddot{y} - \dot{y} = 2t - t^2$$
   für die Anfangsbedingungen $y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 2$

   *Lösung:* $y(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2(e^t - 1)$

   (b) die DGL
   $$\dddot{y} + 2\ddot{y} - 5\dot{y} - 6y = e^{3t} \cdot \cosh 2t$$
   für die Anfangsbedingungen $y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = -1.$

   *Lösung:* $y(t) = \frac{11}{9}e^{-t} - \frac{51}{160}e^{-3t} + \frac{7}{45}e^{2t} - \frac{1}{16}e^t + \frac{1}{288}e^{5t}$

   (c) (*)die DGL
   $$\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = e^t$$
   für die Anfangsbedingungen $y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$

   *Lösung:* $y(t) = \frac{11}{16}e^t + \frac{5}{16}e^{-3t} + \frac{1}{4}te^t$

   (d) (*)die DGL
   $$y'' + 2y' + y = 25 \sin 2x$$
   für die Anfangsbedingungen $y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$

   *Lösung:* $y(x) = 15xe^{-x} + 4e^{-x} - 4\cos 2x - 3\sin 2x$