Fachbereich Physikalische Technik
Prof. Dr. Klaus Morawetz

Zusatzaufgaben (Tutorien) mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik I-8 (18+9 Punkte)

IA Differentialrechnung

1. Bestimmen Sie bei folgenden Beziehungen die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$und schreiben Sie diese als Funktion von y (**1+1 Punkte**):

$$\left(1+y^4\right)x = 1-y^4 \qquad *\, x = y^3 - 4y + 1$$

2. Bilden Sie die Ableitung der folgenden Funktionen, indem Sie zuerst logarithmieren und dann differenzieren (**5+4 Punkte**):

$$\begin{aligned} y &= x^{\frac{1}{x}}; y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x; y = (x^2+1)^{\sin x} \\ y &= x^{x^2}; \quad y = (x^x)^2; \quad *\, y = x^3 e^{x^2} \sin 2x \\ *y &= x^{3/x}; \quad *\, y = \left(\frac{2x}{1+x}\right)^{x^2}; \quad *\, y = \left(x^2+1\right)^{\cos x} \end{aligned}$$

3. Lösen Sie folgende "Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen":
Ein Weg der Breite a biege rechtwinklig ab und habe danach die Breite b. Der Weg werde auf beiden Seiten von senkrechten Häuserfronten begrenzt. Wie lang darf ein Balken maximal sein (Durchmesser sei vernachlässigbar klein), damit er in waagrechter Lage um die Ecke getragen werden kann (Skizze anfertigen)? (**3 Punkte**)

4. Entwickeln Sie das Polynom $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ nach Potenzen von $(x+1)$. (**2 Punkte**)

IB Lineare Algebra

1. Gegeben ist $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

   (a) *zeigen Sie, dass der Vektor $\overrightarrow{y}$ stets orthogonal zu $\overrightarrow{x}$ orientiert ist. (**1 Punkt**)

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, das

$$A^{2n} = (-1)^n E$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (E Einheitsmatrix). (**3 Punkte**)

2. *In einem Betrieb werden zur Produktion der Mengen E_1 und E_2 zweier Endprodukte drei Zwischenprodukte benötigt, die wiederum aus fünf verschiedenen Rohstoffen hergestellt werden. Z_1, Z_2, Z_3 sind Mengeneinheiten der drei Zwischenprodukte, $R_{1,}R_{2,}R_{3,}R_4R_5$ Mengeneinheiten der fünf Rohstoffe. Der Bedarf an Zwischenprodukten für die Endprodukte ist durch

$$\begin{aligned} E_1 &= 2Z_1 + 1Z_2 + 3Z_3 \\ E_2 &= 3Z_1 + 4Z_2 + 2Z_3 \end{aligned}$$

   der Rohstoffeinsatz für je eine Zwischenprodukteinheit durch

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1R_1 + 2R_2 + 0R_3 + 2R_4 + 3R_5 \\ Z_2 &= 2R_1 + 3R_2 + 1R_3 + 3R_4 + 4R_5 \\ Z_3 &= 1R_1 + 4R_2 + 2R_3 + 1R_4 + 3R_5 \end{aligned}$$

   gegeben. Geben Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung den unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Endprodukten und dem Rohstoffbedarf an. (**3 Punkte**)

3. Die Geschwindigkeit eines Elektrons mit der Masse m in einem Magnetfeld $\vec{B}$ und einem elektrischen Feld $\vec{E}$ wird sich bei einer Reibung entsprechend des Kräftegleichgewichtes

$$0 = e(\vec{v} \times \vec{B}) + e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau}$$

   einstellen. Lösen Sie diese Vektorgleichung nach $\overrightarrow{v}$ auf (ohne Verwendung der Komponentendarstellung der Vektoren!) (**4 Punkte**)