Fachbereich Physikalische Technik
Prof. Dr. Klaus Morawetz

Zusatzaufgaben (Tutorien) mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik I-4

1.6 Zahlenfolgen und Reihen, Grenzwerte(11+7 Punkte)

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte: (**3+3 Punkte**)

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}; \qquad \sqrt{4n^2+5n+2}-2n; \quad \sqrt[3]{n^4}-\sqrt[3]{(n^2-1)^2}$$
$$(*)\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}); \quad (*)\sqrt[n]{3^n+5^n-7^n}; \qquad (*)\prod_{\nu=2}^{n}\left(1-\tfrac{1}{\nu^2}\right)$$

2. Auf einem Konto liegt zu Beginn eines Jahres das Kapital K. Am Ende des Jahres und aller folgenden Jahre wird k abgehoben. Berechnen Sie den Kontostand am Ende des $n-$ ten Jahres bei $p\%$ Zinsen. Geben Sie die allgemeine Gleichung an und berechnen Sie dann den Kontostand für $K_0 = 10000, k = 1000, n = 7$ und $p = 4.5$. (**3 Punkte**)

3. Ein Paar Kartoffelkäfer hatt 800 Junge (wieder Pärchen), die nach 6 Wochen fortpflanzungsfähig sind, so daß in einem Sommer meist 4 Generationen leben. Wieviele von den Käfern können bei ungebremster Vermehrung als Nachkommen eines einzigen Pärchens geboren werden? (**2 Punkte**)

4. (*)Die Verteilung von Fermionen bei verschwindender Termperatur $f(p) = \Theta(p_f - p)$ wird durch die Sprungfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß für positive x und ω gilt

$$\Theta(2x - |\omega + x^2|) - \Theta(2x - |\omega - x^2|) = -\Theta(\omega_+ - \omega)\Theta(\omega - |\omega_-|),$$

d.h. $|\omega_-| \leq w \leq w_+$ mit $\omega_\pm = 2x \pm x^2$.(**4 Punkte**)

5. Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ das für die Konvergenz notwendige und hinreichende Kriterium (s. Vorlesung!)

$$\begin{aligned} \text{"}\textit{Für jedes } \varepsilon &> 0 \textit{ gibt es ein } N(\varepsilon), \\ \textit{so daß } |s_{n+k} - s_n| &< \varepsilon \textit{ gilt für alle } k = 1, 2, ... \textit{und } n \geq N(\varepsilon)\text{"} \end{aligned}$$

nicht erfüllt. Schätzen Sie hierzu $|s_{n+k} - s_n|$ ab für den Fall $k = n$. (**3 Punkte**)

IB Vektoren (13+4 Punkte)

1. Gegeben sind die Vektoren

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   a) Sind die Vektoren komplanar? (**1 Punkt**)
   b) Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{d}$ so, dass $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c} - 4\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$ gilt. (**1 Punkt**)

2. Welchen Winkel schließen die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ ein? (**je 1 Punkt**)

   (a) $\overrightarrow{a_1} = (2, 1, 4) \quad \overrightarrow{a_2} = (1, 4, 0)$, (b) $\overrightarrow{a_1} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{a_2} = 2\mu \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -4 \end{pmatrix}$

   (c)(*) $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, (d) (*)$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Gegeben sind die Vektoren

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \mu \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \eta \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie μ, η so, dass beide Vektoren aufeinander senkrecht stehen und jeweils den gleichen Betrag haben. (**2 Punkte**)

4. Zeigen Sie daß die Seitenhalbierenden in einem Dreieck sich in einem Punkt schneiden und die Abschnitte sich wie 2:1 verhalten. Hinweis: stellen Sie das Dreicek durch Vektoren $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ dar. Bezeichnen Sie die Vektoren, die von den Ecken zum Schnittpunkt der Seitenhalbierenden gehen als Vielfaches des Vektors der jeweiligen Seitenhalbierenden. Dieses Vielfache läßt sich berechnen aus der Tatsache, daß jeweils zwei der $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind. (**7 Punkte**)

5. (*)Berechnen Sie das "Spatprodukt" $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$ für $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

   $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch. (**2 Punkte**)