Fachbereich Physikalische Technik
Klaus Morawetz

Zusatzaufgaben (Tutorien) mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik IA-2 (19+12 Punkte)

1.3 Komplexe Zahlen (9+2 Punkte)

1. Welche komplexe Zahl ist das Spiegelbild von $z = a+bi$ bei der Spiegelung am a) Ursprung, b) an der reelen Achse, c) an der imaginären Achse und d) an der Winkelhalbierenden des I. Quadranten ? (Skizze!) (**4 Punkte**)

2. Geben Sie alle Lösungen von

$$x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 6x + 4 = 0$$

   an, indem Sie Lösungen raten und die Gleichungen dann durch Polynomdivision reduzieren. (**3 Punkte**)

3. Skizzieren Sie die 6-ten Einheitswurzeln von (**2 Punkte**)

$$z^6 = 1.$$

4. (*)Es sei $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung und tragen Sie diese in die Gaußsche Zahlenebene ein. (**2 Punkte**)

1.4 Summen, Produkte, Folgen (10+10 Punkte)

1. Berechnen Sie (**6 Punkte**)
   $\sum\limits_{k=0}^{4} 5^k$; $\sum\limits_{k=0}^{9}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})$; $(*)\sum\limits_{k=-3}^{4}(7-4a)$; $(*)\sum\limits_{j=0}^{4}(-1)^j(j+1)$; $(*)\sum\limits_{k=2}^{6}\prod\limits_{i=2}^{k}(i-1)$;
   $(*)\prod\limits_{k=1}^{3}(a+k)$;

2. Zeigen Sie, dass
   $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2-n\overline{x}^2$, wobei $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ ist (**2 Punkte**).

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Binomialsatzes (**2 Punkte**)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=1;\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k=4^n$$

4. Von den folgenden Zahlenfolgen sind die ersten 4 Glieder bekannt. Stellen Sie den Rechenausdruck für das allgemeine Glied auf (**4 Punkte**):
   $1,-1,1,-1,1,-1,....;\quad 1,-1,-3,-5,.....;\qquad 4,2,1,\frac{1}{2},.....;\qquad 1,3,7,15,.....$

5. *Die berühmte Fibonacci Folge (Da Vinci Code) ist definiert als $F_1=F_2=1$ und jedes weitere Glied als

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\quad n\geq 2.$$

   Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß man jeden Term dieser Folge aus der Formel

$$F_n=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

   erhält. Achtung, hier brauchen Sie zwei Induktionsvoraussetzungen. (**6 Punkte**).