Fachbereich Physikalische Technik
Prof. Dr. Klaus Morawetz

Zusatzaufgaben (Tutorien) mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik III-9

Komplexe Funktionentheorie, Hilbertraum (18+8 Punkte)

1. Entwickeln Sie die Funktionen in Laurentreihen um den angegebenen Punkt und bestimmen Sie den Konvergenzradius (**4+2 Punkte**):

$$*\frac{2z}{z^2-1} \text{ an } z_0 = 2; \quad \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \text{ an } z_0 = 0; \quad \sin\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ an } z_0 = 0.$$

2. Orthogonalisieren Sie die ersten 3 Polynome $\{1, x, x^2\}$ mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens, wenn das Skalarprodukt in $L_2(0,\infty)$ gegeben ist mit der Wichtung e^{-x}, um die Laguerrschen Polynome zu erhalten (**6 Punkte**). Entwickeln Sie $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ nach diesen Polynomen bis zur 3. Ordnung (**2 Punkte**).

3. *Lösen Sie die Integralgleichung mit separablem Kern

$$x(t) - \lambda \int_0^1 s\,t\,x(s)ds = 1$$

(**2 Punkte**). Für welche λ gibt es nur eine Lösung? Welche Gleichung lösen die λ für die obige Fredholm Integralgleichung zweiter Art keine Lösung hat (**2 Punkte**)?

4. (a) Lösen Sie die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{t-x} = g(t)$$

mit $g(t) = \frac{t}{t^2+a^2}$, $a > 0$ nach $f(x)$ auf. Bilden Sie dazu die Hilbertransformierte $(Hg)(s)$ und benutzen Sie die Identität $H^2 = -I$. (**4 Punkte**)

(b) Wie ändert sich die Lösung für $g = g(t+b)$? (**2 Punkte**)

(c) *Weisen Sie die folgende Eigenschaft der Hilberttransformation

$$(Hy')(x) = \frac{d}{dx}(Hy)(x)$$

nach (**2 Punkte**).