Fachbereich Physikalische Technik
Prof. Dr. Klaus Morawetz

Zusatzaufgaben mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik III-6

Fourier- und LaPlace - Transformation II (16 +13 Punkte)

1. Ein harmonischer Oszillator mit dem Potential $m\omega_0^2$ wird gedämpft durch eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft $-\gamma m v$ und von einer periodischen Kraft $F(t) = mk(t)$ mit der Periode T angetrieben.
   - Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. (**1 Punkt**)
   - Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter der Annahme, daß die periodische Kraft schon immer wirkte, mit Hilfe der Fouriertransformation. Hinweis: Sie sollten ein Faltungsintegral in der Zeit mit der externen Kraft bekommen. (**5 Punkte**)
   - Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter der Annahme, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfgangsgeschwindigkeit v_0 am Ort x_0 vorliegt mit Hilfe der LaPlace transformation (**4 Punkte**)

2. * Beweisen Sie, dass für das Faltungsprodukt das Assoziativgesetz, also
$$f(t) \otimes (g(t) \otimes h(t)) = (f(t) \otimes g(t)) \otimes h(t)$$
gültig ist. (**2 Punkte**)

3. Verifizieren Sie den Faltungssatz (LaPlace oder Fourier) am Beispiel der Faltung einer Rechteckfunktion mit sich selbst.(***2 Punkte**+**2 Punkte**)

4. * Berechnen Sie die Laplace-Transformierte jeweils für folgende kausale Funktionen: (**6 Punkte**)
$$a)\quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le t_1 \\ 1 & \text{für } t_1 \le t < t_2 \\ 0 & \text{für } t_2 \le t \end{cases}$$
$$b)\quad f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau} & \text{für } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{für } \tau \le t \end{cases}$$
$$c)\quad f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} < t \end{cases}$$

5. Wie lauten die Originalfunktionen zu (**2 Punkte**)
$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s+2}; \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8}$$

6. *Ermitteln Sie mit Hilfe des Differenziationssatzes der Bildfunktion und anschließender Partialbruchzerlegung die Originalfunktion zu (**5 Punkte**)
$$F(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$$