Fachbereich Physikalische Technik
Prof. Dr. Klaus Morawetz

Zusatzaufgaben mit * gekennzeichnet

Übungen Mathematik III-4

Fourierreihen (10+4 Punkte)

1. Es sei (**3 Punkte**)
$$f(t) = \sin^3 \omega_0 t$$
   (a) Skizzieren Sie die Funktion und geben Sie die komplexe Fourierreihe an (bevor Sie schematisch "losrechnen": War da nicht etwas mit Moivre?!).
   (b) Überführen Sie die komplexe Reihe in eine reelle Darstellung.
   (c) Skizzieren Sie die entsprechenden Spektren.

2. Bei der Zweiweggleichrichtung der sinusförmigen Wechselspannung erhält man bekanntlich (**2 Punkte**)
$$u(t) = u_0 \left|\sin \omega_0 t\right|$$
   (a) Berechnen Sie die Fourierreihe des Zeitanteils in komplexer und reeller Darstellung.
   (b) Skizzieren Sie die zugehörigen Spektren

3. Zeigen Sie, dass aus der komplexen Form des Fourierintegrals
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
   mit
$$c(\omega) = \frac{1}{2}\left[a\left(\omega\right) - ib\left(\omega\right)\right], bzw. c(-\omega) = \frac{1}{2}\left[a\left(\omega\right) + ib\left(\omega\right)\right]$$
   die reelle Form
$$f(t) = \int_{0}^{+\infty} \left[a(\omega)\cos\left(\omega t\right) + b\left(\omega\right)\sin\left(\omega t\right)\right] d\omega$$
   folgt (**2 Punkte**).

4. Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \cos x \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{a} rect\left(\frac{x}{a}\right)$$

   (a) Berechnen Sie

   $$y(x) = f(x) \otimes g(x)$$

   .

   Diskutieren Sie $y(0)$ für die Fälle $\lim a = 0$, $a = \pi$, $a = 2\pi$.

   (b) Geben Sie mit Hilfe des Faltungssatzes $Y(\omega)$ an.

   (c) Berechnen Sie $y(x)$ erneut durch inverse Fouriertransformation von $Y(\omega)$.(**3 Punkte**)

5. (*) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der geraden Funktion

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad mit \quad \alpha > 0$$

   Skizzieren Sie Funktion und Spektralfunktion! (**2 Punkte**)

6. (*) Berechnen Sie außerdem die Fouriertransformierte der ungeraden Funktion (**2 Punkte**)

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} sign(t), \quad mit \quad \alpha > 0$$

   wobei $sign(t)$ die Vorzeichenfunktion

$$sign(t) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad t < 0 \\ 0 & \text{für} \quad t = 0 \\ 1 & \text{für} \quad t > 0 \end{cases}$$

   bedeutet. Skizzieren Sie ebenfalls Funktion und Spektralfunktion.